

Họ tên học sinh:.....; Số báo danh:.....

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 3 = 0$?

- A. $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (2; 1; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (2; -1; 3)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 1; 3)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1	3	1		$+\infty$	

Hàm số đã cho có điểm cực đại là

- A. $(0; 3)$. B. $x = 0$. C. $y = 3$. D. $y = 1$.

Câu 3. Thống kê điểm kiểm tra giữa kỳ 1 môn Toán của 30 học sinh lớp 12C1 của một trường THPT được ghi lại ở bảng sau:

Điểm	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Số học sinh	4	8	11	7

Trung vị của mẫu số liệu gốc thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

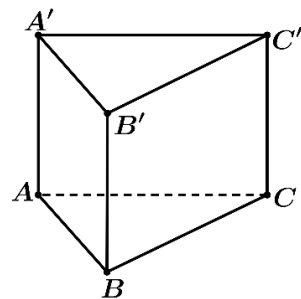
- A. $[2; 4)$. B. $[4; 6)$. C. $[6; 8)$. D. $[8; 10)$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$.

Trong các biểu thức vectơ sau đây thì biểu thức nào là đúng?

- A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.



Câu 5. Với mọi số thực dương a thì $\log_3(27a) - \log_3 a$ bằng

- A. $\log_3(26a)$. B. 9. C. 3. D. $3 - 2\log_3 a$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$ có một vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n} = (2; 3; 2)$. B. $\vec{n} = (3; 2; 3)$. C. $\vec{n} = (2; 3; -2)$. D. $\vec{n} = (3; 2; -3)$.

Câu 7. Nếu $\int_{-1}^2 f(x)dx = 5$ thì $\int_{-1}^2 4f(x)dx$ bằng:

- A. 20. B. 10. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{5}{4}$.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2; u_{n+1} = 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của u_3 bằng

- A. 6. B. $\frac{3}{2}$. C. 18. D. 12.

Câu 9. Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là:

- A. $y = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $y = -1$.

Câu 11. Bạn An rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày của bạn An được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

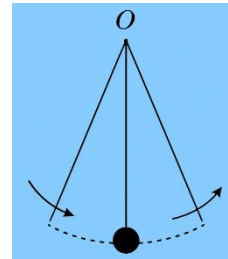
- A. 31,25. B. 31,26. C. 5,4. D. 5,6.

Câu 12. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox .

- A. 33. B. $\frac{33}{5}$. C. $\frac{33\pi}{5}$. D. 33π .

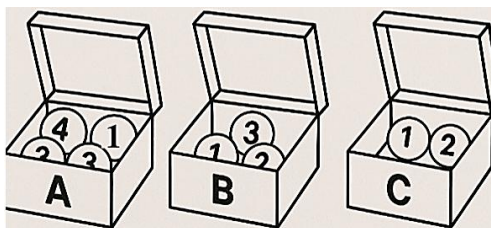
PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Vận tốc $v(t)$ (tính bằng centimét/giây) của một con lắc đơn theo thời gian t được cho bởi các công thức $v(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tại thời điểm $t = 0$, vận tốc của con lắc đơn là $v(0) = 1$.	☐	☐
b) Đạo hàm của $v(t)$ là $v'(t) = -4\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.	☐	☐
c) Phương trình $v'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.	☐	☐
d) Trong khoảng từ 0 đến 10 giây, con lắc đơn có 4 lần đạt vận tốc lớn nhất.	☐	☐

Câu 2. Hộp A chứa bốn quả bóng được đánh số 1; 2; 3; 4. Hộp B chứa ba quả bóng được đánh số 1; 2; 3. Hộp C chứa hai quả bóng được đánh số 1; 2. Một trong ba hộp được chọn ngẫu nhiên và sau đó một quả bóng được chọn ngẫu nhiên từ hộp đó.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Nếu hộp A được chọn thì xác suất quả bóng số 1 được chọn bằng $\frac{1}{3}$.	☐	☐
b) Xác suất chọn được quả bóng số 3 bằng $\frac{5}{36}$.	☐	☐
c) Biết rằng quả bóng số 1 đã được chọn, xác suất để quả bóng này thuộc hộp A bằng 0,23 (làm tròn đến hàng phần trăm).	☐	☐
d) Nếu người ta lấy được quả bóng số 1, sau đó hoàn lại quả bóng và tiếp tục lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp đó thì được quả bóng số 3; xác suất để quả bóng này thuộc về hộp B bằng $\frac{16}{27}$.	☐	☐

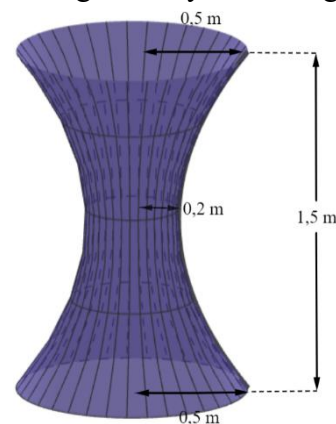
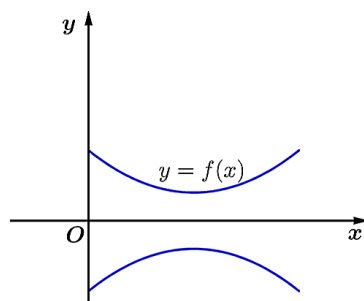
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là nghìn kilômét, quỹ đạo chuyển động của hai tiểu hành tinh lần lượt được mô hình hóa là phương trình các đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Ta xem vùng khí quyển của sao Hỏa là mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3,5^2$.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) Tiểu hành tinh thứ nhất đi qua điểm $A(-1; -2; 0)$, vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; -2; -1)$.	☐	☐
b) Sao hỏa có tâm là gốc tọa độ, bán kính tính từ tâm sao Hỏa đến điểm ngoài cùng của khí quyển là khoảng 350 km.	☐	☐
c) Tiểu hành tinh thứ nhất có thể đi vào vùng khí quyển của sao Hỏa.	☐	☐
d) Hai tiểu hành tinh không có nguy cơ va chạm nhau.	☐	☐

Câu 4. Một chậu nước có dạng một khối tròn xoay với thiết diện qua trục của chậu (mặt cắt đi qua hai tâm của hai đường tròn đáy) là hai đường parabol đối xứng nhau qua trục đó. Biết hai đường tròn đáy chậu cùng có bán kính $0,5\text{ m}$; thiết diện nhỏ nhất vuông góc với trục của chậu có bán kính $0,2\text{ m}$; chiều cao của chậu nước bằng $1,5\text{ m}$. Người ta bơm nước vào chậu với tốc độ 5 lít/phút .

Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với tâm đường tròn đáy của chậu nước, tia Ox chứa trục của chậu nước (đơn vị trên mỗi trục là mét). Mặt cắt qua trục của chậu nước cho ta hai nhánh parabol như hình vẽ, gọi $y = f(x)$ là parabol nằm trên trục hoành.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:	Đúng	Sai
a) $f(x) = \frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$.	☐	☐
b) Sức chứa tối đa của chậu nước bằng $0,5\text{ m}^3$ (làm tròn đến hàng phần chục của mét khối).	☐	☐
c) Sau $1,5$ giờ bơm nước (làm tròn đến hàng phần chục của giờ) thì chậu đầy nước.	☐	☐
d) Nếu bơm từ đầu như thế thì đến phút thứ 20 , tốc độ dâng lên của nước bằng $0,01\text{ m/phút}$.	☐	☐

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho tứ diện $OABC$ với OBC là tam giác vuông tại O , trong đó $OB = 1$ và $OC = \sqrt{3}$. Biết rằng OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và $OA = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Trả lời:

Câu 2. Một cửa hàng cần nhập 2500 chiếc máy tính bảng trong 1 năm. Cửa hàng chọn chia thành nhiều đợt giao hàng, mỗi đợt giao x chiếc ($1 \leq x \leq 2500, x \in \mathbb{N}^*$). Công ty vận chuyển tính phí cho mỗi đợt như sau:

- Phí điều xe cố định: 20 đô la/đợt.
- Phí an ninh–bảo hiểm cho lô hàng lớn: $0,002x^2$ đô la/đợt.

Hỏi mỗi đợt công ty nên vận chuyển bao nhiêu máy tính bảng để **tổng chi phí vận chuyển trong năm** là nhỏ nhất?

Trả lời:



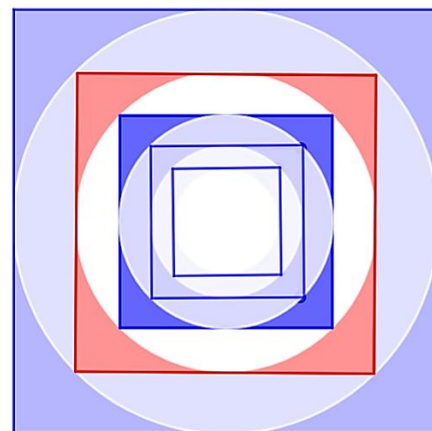
Câu 3. Trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài: m), một người lái mô tô xuất phát từ vị trí $A(0; 0; 0)$ đến $B(0; 600; 0)$ trong 6 phút. Từ B , người đó cho xe đổi hướng để tiến thẳng đến $C(1500; 600; 0)$ với tốc độ không đổi và bằng đúng tốc độ khi đi từ A đến B .

Hỏi ở phút thứ 8 kể từ khi xe đổi hướng, tốc độ thay đổi khoảng cách của xe mô tô đối với vị trí xuất phát A là bao nhiêu m/phút?

Trả lời:



Câu 4. Một loại gạch men có kích thước hình vuông 60×60 cm. Người ta thiết kế hoa văn cho viên gạch bằng cách tạo đường tròn (C_1) nội tiếp hình vuông ban đầu, phần nằm ngoài đường tròn (C_1) mà thuộc viên gạch thì được tô màu đậm. Tiếp theo họ tạo ra một hình vuông nội tiếp đường tròn (C_1), bên trong hình vuông này lại có một đường tròn nội tiếp (C_2); và họ tiếp tục tô màu đậm cho phần nằm ngoài đường tròn (C_2) mà thuộc hình vuông này. Quy luật này cứ thế tiếp tục vô hạn lần (thảm khảo hình vẽ). Hỏi tổng diện tích thuộc về viên gạch được tô màu đậm là bao nhiêu cm vuông? Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị của cm vuông.

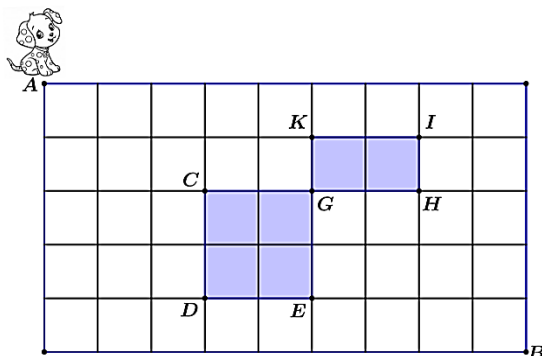


Trả lời:

Câu 5. Trên một ô lưới như hình, hình chữ nhật AB gồm **9 cột** và **5 hàng** ô vuông. Một **bé cún** xuất phát từ điểm A và chạy đến điểm B . Mỗi bước, bé cún chỉ được chạy **sang phải** hoặc **xuống dưới** đúng 1 ô (đi theo các cạnh ô vuông), vì vậy bé cún luôn đi theo **đường ngắn nhất**.

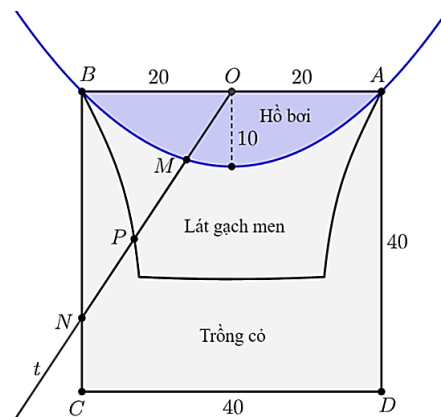
Trong hình có các vùng tô đậm là những bãi bùn. Bé cún **không được chạy vào miền trong** của các vùng tô đậm, nhưng **được phép chạy trên đường biên** của chúng. Hỏi bé cún có **bao nhiêu** cách chạy từ A đến B ?

Trả lời:



Câu 6. Công tử Bạc Liêu có một mảnh đất hình vuông ở một khu đô thị sầm uất, hình vuông có cạnh 40 m , công tử dự định xây một hồ bơi được giới hạn bởi cạnh AB của hình vuông và một parabol đi qua hai đầu mút cạnh đó, đỉnh của parabol cách cạnh AB một đoạn 10 m . Từ vị trí O là trung điểm AB , kẻ tia Ot bất kì cắt parabol và một cạnh khác của hình vuông theo thứ tự tại các điểm M, N . Gọi P là trung điểm MN , khi tia Ot quay quanh gốc O thì tập hợp các điểm P tạo thành đường cong (L) . Công tử dự định sử dụng một loại gạch men đặc biệt để lát nền cho toàn bộ khu vực được giới hạn bởi đường cong (L) và parabol. Phần còn lại trên mảnh đất hình vuông đó thì công tử sẽ trồng cỏ.

Biết rằng chi phí xây hồ bơi là $5\text{ triệu đồng}/m^2$, chi phí lát gạch men là $2\text{ triệu đồng}/m^2$, chi phí trồng cỏ tự nhiên là $100\text{ nghìn đồng}/m^2$. Tính tổng số tiền mà công tử Bạc Liêu phải chi trả cho toàn bộ dự án trên theo đơn vị tỷ đồng (làm tròn đến hàng phần chục).



HẾT

ĐÁP ÁN MÃ ĐỀ 423

PHẦN I				PHẦN II				PHẦN III			
1A	2B	3C	4C	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 1	0,77	Câu 4	1545
5C	6D	7A	8C	Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Câu 2	100	Câu 5	1127
				Sai	Sai	Sai	Đúng				
9A	10B	11D	12C	Đúng	Đúng	Đúng	Đúng	Câu 3	80	Câu 6	2,4
				Đúng	Sai	Đúng	Sai				

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng

$(P): 2x - y + z + 3 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (2; -1; 1)$.

B. $\vec{n}_2 = (2; 1; 1)$.

C. $\vec{n}_3 = (2; -1; 3)$.

D. $\vec{n}_4 = (-1; 1; 3)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			1	$+\infty$

Hàm số đã cho có điểm cực đại là

A. $(0; 3)$.

B. $x = 0$.

C. $y = 3$.

D. $y = 1$.

Câu 3: Thống kê điểm kiểm tra giữa kì 1 môn Toán của 30 học sinh lớp 12C1 của một trường THPT được ghi lại ở bảng sau:

Điểm	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$
Số học sinh	4	8	11	7

Trung vị của mẫu số liệu gốc thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $[2; 4)$.

B. $[4; 6)$.

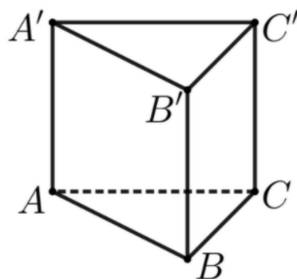
C. $[6; 8)$.

D. $[8; 10)$.

Lời giải

Ta có $n = 30 \Rightarrow \frac{n}{2} = 15$, do đó trung vị của mẫu số liệu gốc thuộc khoảng $[6; 8)$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$.



Trong các biểu thức vector sau đây thì biểu thức nào là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Ta có $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.

Câu 5: Với mọi số thực dương a thì $\log_3(27a) - \log_3 a$ bằng

A. $\log_3(26a)$.

B. 9.

C. 3.

D. $3 - 2\log_3 a$.

Lời giải

Ta có $\log_3(27a) - \log_3 a = \log_3 27 + \log_3 a - \log_3 a = \log_3 27 = 3$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$ có một vector pháp tuyến là.

A. $\vec{n} = (2; 3; 2)$.

B. $\vec{n} = (3; 2; 3)$.

C. $\vec{n} = (2; 3; -2)$.

D. $\vec{n} = (3; 2; -3)$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 3z - 6 = 0$ nên (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 2; -3)$.

Câu 7: Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 5$ thì $\int_{-1}^2 4f(x) dx$ bằng

A. 20.

B. 10.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

$$\int_{-1}^2 4f(x) dx = 4 \int_{-1}^2 f(x) dx = 4 \cdot 5 = 20$$

Câu 8: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của u_3 bằng

A. 6.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 18.

D. 12.

Lời giải

Do $u_{n+1} = 3u_n$ nên dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 3$.

Vì vậy $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Câu 9: Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện bài toán $-x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

Ta có $y' = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x}} \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

A. $y = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $y = -1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 11: Bạn An rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày của bạn An được thống kê lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 31,25.

B. 31,26.

C. 5,4.

D. 5,6.

Lời giải

Bảng giá trị đại diện

Thời gian (phút)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)
Giá trị đại diện	$\frac{45}{2}$	$\frac{55}{2}$	$\frac{65}{2}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{85}{2}$
Số ngày	6	6	4	1	1

Ta có giá trị trung bình của mẫu số liệu: $\bar{x} = \frac{1}{18} \left(6 \times \frac{45}{2} + 6 \times \frac{55}{2} + 4 \times \frac{65}{2} + 1 \times \frac{75}{2} + 1 \times \frac{85}{2} \right) = \frac{85}{3}$;

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là:

$$s = \sqrt{\frac{1}{18} \left(\left(22,5 - \frac{85}{3} \right)^2 \times 6 + \left(27,5 - \frac{85}{3} \right)^2 \times 6 + \left(32,5 - \frac{85}{3} \right)^2 \times 4 + \left(37,5 - \frac{85}{3} \right)^2 \times 1 + \left(42,5 - \frac{85}{3} \right)^2 \times 1 \right)}$$

$$\approx 5,6.$$

Câu 12: Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox .

A. 33.

B. $\frac{33}{5}$.

C. $\frac{33\pi}{5}$.

D. 33π .

Lời giải

Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 3$ khi quay quanh trục Ox có thể tích bằng $V = \pi \int_0^3 (x^2 - 4x + 4)^2 dx = \frac{33}{5} \pi$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S)

Câu 1: Vận tốc $v(t)$ (tính bằng centimet / giây) của một con lắc đơn theo thời gian t được cho bởi

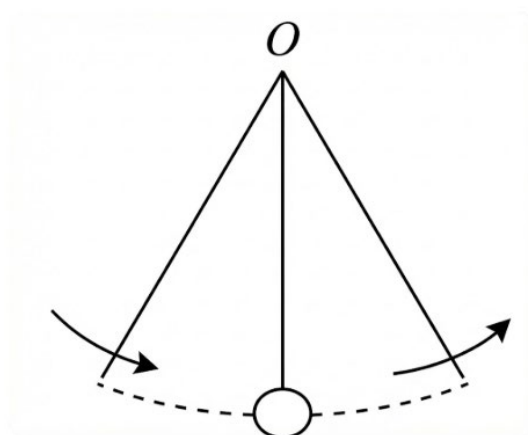
công thức: $v(t) = 2 \sin \left(2t + \frac{\pi}{6} \right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tại thời điểm $t = 0$, vận tốc của con lắc đơn là $v(0) = 1$.

b) Đạo hàm của $v(t)$ là $v'(t) = -4 \cos \left(2t + \frac{\pi}{6} \right)$

c) Phương trình $v'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ là $\frac{\pi}{6}$

d) Trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, con lắc đơn có 4 lần đạt vận tốc lớn nhất.



Lời giải

a) Đúng

Tại thời điểm $t = 0$, vận tốc của con lắc đơn là $v(0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

b) Sai

Đạo hàm của $v(t)$ là $v'(t) = 4 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) Đúng.

Phương trình $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Đúng.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, con lắc đơn có 4 lần đạt vận tốc lớn nhất.

Ta có: $v(t) = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -2 \leq v(t) \leq 2$ với mọi t

Suy ra: $v(t)_{\max} = 2 \Leftrightarrow \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + k\pi$

Do $0 \leq t \leq 10 \Rightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$.

Vậy có 4 giá trị.

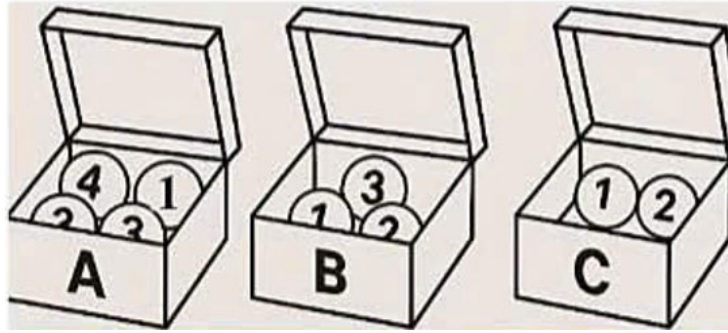
Câu 2: Hộp A chứa **4 quả bóng đỏ** và **3 quả bóng xanh**. Hộp B chứa **2 quả bóng đỏ** và **4 quả bóng xanh**. Lấy ngẫu nhiên **2 quả bóng** từ hộp A bỏ vào hộp B, sau đó lấy ngẫu nhiên **2 quả bóng** từ hộp B. Hãy xét tính Đúng/Sai của các mệnh đề sau (hoặc tính các xác suất liên quan):

a) Xác suất lấy được 2 quả bóng đỏ từ hộp A để bỏ sang hộp B là $\frac{2}{7}$.

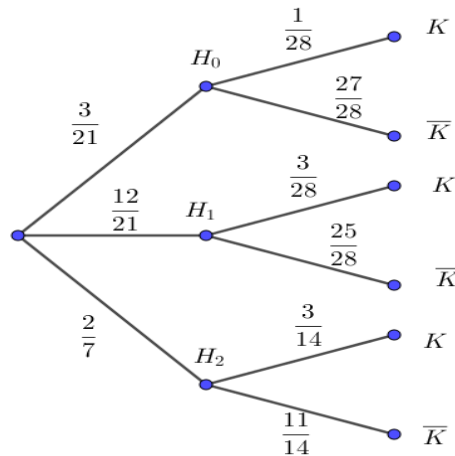
b) Sau khi bỏ 2 quả bóng từ hộp A sang, hộp B có tất cả 9 quả bóng.

c) Xác suất để 2 quả bóng lấy ra từ hộp B là 2 quả bóng đỏ là $\frac{25}{196}$.

d) Biết rằng 2 quả bóng lấy ra từ hộp B là 2 quả bóng đỏ. Xác suất để 2 quả bóng lấy từ hộp A (chuyển sang B) cũng là 2 quả bóng đỏ là $\frac{12}{25}$.



Lời giải



Gọi các biến cố:

H_2 : Chuyển 2 Đỏ từ A sang B.

H_1 : Chuyển 1 Đỏ, 1 Xanh từ A sang B.

H_0 : Chuyển 0 Đỏ (2 Xanh) từ A sang B.

K : Lấy được 2 quả Đỏ từ hộp B (sau khi chuyển).

a) ĐÚNG

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega_A) = C_7^2 = 21$ (số cách lấy 2 quả bóng từ hộp 1)

$$P(H_2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

b) SAI

Hộp B nhận thêm 2 quả nên tổng là $6 + 2 = 8$ quả

c) ĐÚNG

$$P(H_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21}.$$

$$P(H_0) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21}.$$

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega_B) = C_8^2 = 28$ (số cách lấy hai quả bóng từ hộp 2)

$$\text{Nếu } H_2 \text{ xảy ra (B có } 2+2=4 \text{ Đỏ): } P(K | H_2) = \frac{C_4^2}{28} = \frac{6}{28}.$$

$$\text{Nếu } H_1 \text{ xảy ra (B có } 2+1=3 \text{ Đỏ): } P(K | H_1) = \frac{C_3^2}{28} = \frac{3}{28}.$$

$$\text{Nếu } H_0 \text{ xảy ra (B có } 2+0=2 \text{ Đỏ): } P(K | H_0) = \frac{C_2^2}{28} = \frac{1}{28}.$$

$$P(K) = P(H_2).P(K | H_2) + P(H_1).P(K | H_1) + P(H_0).P(K | H_0)$$

$$P(K) = \frac{6}{21} \cdot \frac{6}{28} + \frac{12}{21} \cdot \frac{3}{28} + \frac{3}{21} \cdot \frac{1}{28}$$

$$P(K) = \frac{36+36+3}{588} = \frac{75}{588} = \frac{25}{196}.$$

d) ĐÚNG

Xác suất để bóng chuyển từ A là 2 Đỏ (H_2) khi biết bóng lấy từ B là 2 Đỏ (K):

$$P(H_2 | K) = \frac{P(H_2 \cap K)}{P(K)} = \frac{P(H_2).P(K | H_2)}{P(K)}$$

$$P(H_2 | K) = \frac{\frac{36}{588}}{\frac{75}{588}} = \frac{36}{75} = \frac{12}{25}.$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là nghìn kilomet, quỹ đạo chuyển động của hai tiểu hành tinh lần lượt được mô tả hóa là phương trình các đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Ta xem vùng khí quyển của sao hỏa là mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3,5^2$.

- a) Tiểu hành tinh thứ nhất đi qua điểm $A(-1; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; -2; -1)$.
- b) Sao hỏa có tâm là gốc tọa độ, bán kính từ tâm sao hỏa đến điểm ngoài cùng của khí quyển là khoảng $350km$.
- c) Tiểu hành tinh thứ nhất có thể đi vào vùng khí quyển của sao hỏa.
- d) Hai tiểu hành tinh không có nguy cơ va chạm nhau.

Lời giải

a) ĐÚNG

Ta có d_1 đi qua $\frac{-1+1}{1} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{1}$ nên tiểu hành tinh thứ nhất đi qua điểm $A(-1; -2; -1)$.

b) SAI

Ta có (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 3,5$ nên Sao hỏa có tâm là gốc tọa độ, khoảng cách từ tâm của sao hỏa đến điểm ngoài cùng của khí quyển là $R = 3,5$. Suy ra mệnh đề b) Sai.

c) ĐÚNG

Ta có d_1 đi qua điểm $A(-1;-2;0)$ và có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = (1;2;1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = (-1;-2;0), [\vec{u}, \overrightarrow{OA}] = (2;-1;0) \Rightarrow d(O, d_1) = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{30}}{6} < 3,5 \text{ nên}$$

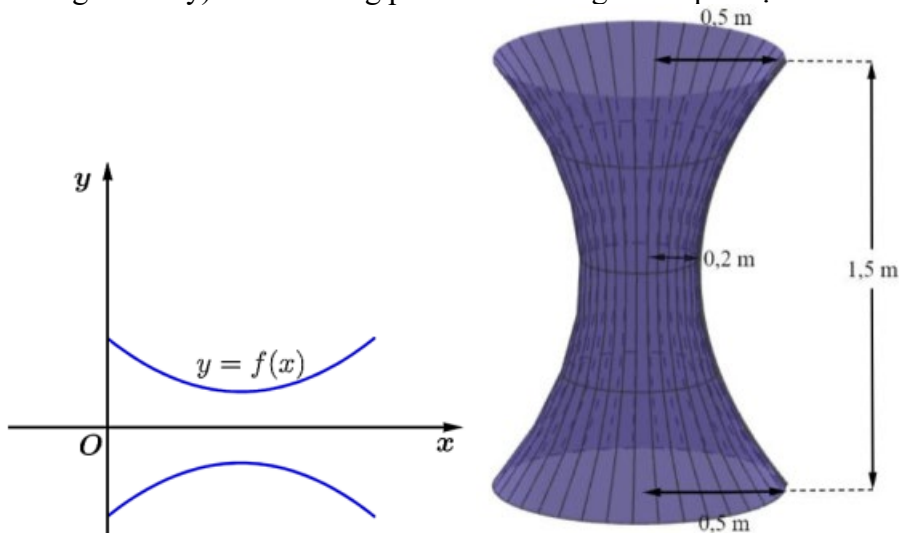
tiểu hành tinh thứ nhất có thể đi vào vùng khí quyển của sao hỏa.

d) ĐÚNG

Đường thẳng d_1 đi qua $A(-1;-2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;2;1)$, đường thẳng d_2 đi qua điểm $B(2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (2;1;1)$

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1;1;0)$, $\overrightarrow{AB} = (3;3;0) \Rightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \neq 0$ nên hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau. Vậy hai tiểu hành tinh không có nguy cơ va chạm nhau.

Câu 4: Một chậu nước có dạng một khối tròn xoay với thiết diện qua trục của chậu (mặt cắt đi qua hai tâm của hai đường tròn đáy) là hai đường parabol đối xứng nhau qua trục đó.



Biết hai đường tròn đáy chậu cùng có bán kính bằng $0,5\text{ m}$; thiết diện nhỏ nhất vuông góc với trục của chậu có bán kính $0,2\text{ m}$; chiều cao của chậu nước bằng $1,5\text{ m}$. Người ta bơm nước vào chậu với tốc độ 5 lít/phút . Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với tâm đường tròn đáy của chậu nước, tia Ox chứa trục của chậu nước (đơn vị trên mỗi trục là mét). Mặt cắt qua trục của chậu nước cho ta hai nhánh parabol như hình vẽ. Gọi $y = f(x)$ là parabol nằm phía trên trục hoành. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

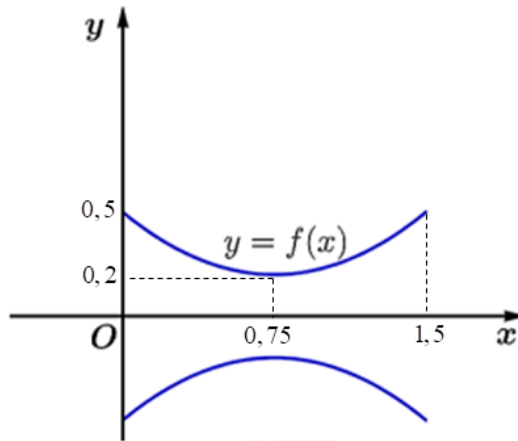
a) $f(x) = \frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$.

b) Sức chứa tối đa của chậu nước bằng $0,5\text{ m}^3$ (làm tròn đến hàng phần chục của mét khối).

c) Sau $1,5$ giờ bơm nước (làm tròn đến hàng phần chục của giờ) thì chậu đầy nước.

d) Nếu bơm từ đầu như thế thì đến phút thứ 20 , tốc độ đang lên của nước bằng $0,01\text{ m/phút}$.

Lời giải



a) ĐÚNG

Gọi $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; 0,5)$ và đỉnh $I(0,75; 0,2)$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} c = 0,5 \\ a(0,75)^2 + b \cdot 0,75 + c = 0,2 \\ -\frac{b}{2a} = 0,75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ \frac{9a}{16} + \frac{3b}{4} + c = \frac{1}{5} \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{15} \\ b = -\frac{4}{5} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } f(x) = \frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}.$$

b) ĐÚNG

Thể tích của chậu nước bằng

$$V = \pi \int_0^{1,5} [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{1,5} \left[\frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \right]^2 dx \approx 0,4618141201 \approx 0,5.$$

c) ĐÚNG

Tốc độ bơm nước vào bể $5 \text{ lít/phút} = 5 \text{ dm}^3/\text{phút} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{phút}$

Thể tích nước bơm sau $1,5 \text{ giờ} = 1,5 \times 60 = 90 \text{ phút}$ là $5 \cdot 10^{-3} \times 90 = 0,45 \approx 0,5 \text{ m}^3$.

d) ĐÚNG

Gọi h là độ cao của nước trong chậu sau khi bơm được t phút.

$$\text{Ta có: } V_h = \pi \int_0^h \left(\frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2} \right)^2 dx = \pi \left(\frac{64}{1125}h^5 - \frac{16}{75}h^4 + \frac{88}{225}h^3 - \frac{2}{5}h^2 + \frac{1}{4}h \right) \text{ m}^3.$$

Thể tích nước bơm sau t phút là $V = 0,005t \text{ m}^3$

$$\text{Khi đó: } \pi \left(\frac{64}{1125}h^5 - \frac{16}{75}h^4 + \frac{88}{225}h^3 - \frac{2}{5}h^2 + \frac{1}{4}h \right) = 0,005t \quad (*).$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 20 \text{ ta có: } \pi \left(\frac{64}{1125}h^5 - \frac{16}{75}h^4 + \frac{88}{225}h^3 - \frac{2}{5}h^2 + \frac{1}{4}h \right) = 0,1$$

$$\Rightarrow h_0 \approx 0,1640803548.$$

$$\text{Đạo hàm theo biến } t \text{ hai vế của } (*) \text{ ta được: } \left(\frac{64}{225}h^4 - \frac{64}{75}h^3 + \frac{264}{225}h^2 - \frac{4}{5}h + \frac{1}{4} \right) h'(t) = \frac{0,005}{\pi}$$

Tốc độ dâng lên của nước

$$v(t) = h'(t) = \frac{0,005}{\pi \left(\frac{64}{225}h^4 - \frac{64}{75}h^3 + \frac{264}{225}h^2 - \frac{4}{5}h + \frac{1}{4} \right)}$$

Tại thời điểm $t = 20, h_0 \approx 0,1640803548$ tốc độ dâng của nước là:

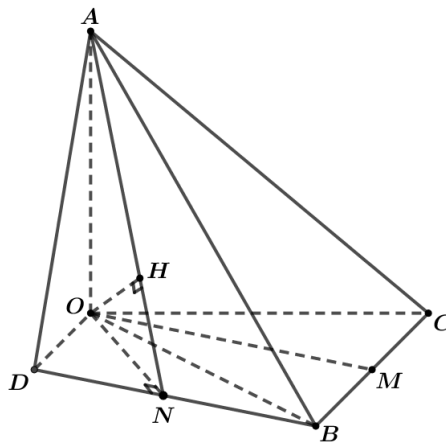
$$v(20) = h'(20) = \frac{0,005}{\pi \left(\frac{64}{225} h_0^4 - \frac{64}{75} h_0^3 + \frac{264}{225} h_0^2 - \frac{4}{5} h_0 + \frac{1}{4} \right)} \approx 0,01084447993 \text{ m/phút.} \approx 0,01.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ với OBC là tam giác vuông tại O , trong đó $OB = 1$ và $OC = \sqrt{3}$. Biết rằng OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và $OA = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC , tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp số: 0,77.



Qua điểm B kẻ đường thẳng $d \parallel OM$, qua điểm O kẻ $\Delta \parallel BC$. $d \cap \Delta = \{D\}$.

Khi đó $OM \parallel DB$ hay $OM \parallel (ADB)$.

Ta có $d(OM, AB) = d(OM, (DAB)) = d(O, (DAB))$.

Ке $ON \perp DB$, $OH \perp AN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} DB \perp ON \\ DB \perp OA \\ OA, ON \subset (AON) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AON) \Rightarrow BD \perp OH.$$

Ta có $\begin{cases} OH \perp AN \\ OH \perp BD \\ AN, BD \subset (DAB) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (DAB) \text{ hay } d(O, (DAB)) = OH.$

Tam giác OBC vuông tại O nên $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2$.

Mặt khác, tam giác OBC vuông tại O có OM là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên

$$OM = \frac{1}{2}BC = 1.$$

Tứ giác $ODBM$ là hình bình hành nên $\begin{cases} OD = BM = \frac{1}{2}BC = 1 \\ OM = DB = 1 \end{cases}$.

Ta có tam giác ODB có $OD = OB = DB = 1$ nên tam giác ODB đều

Khi đó $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác AON vuông tại O có OH là đường cao:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(OM, AB) = d(O, (DAB)) = OH = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,77.$$

Câu 2: Một cửa hàng cần nhập 2500 chiếc máy tính bảng trong 1 năm. Cửa hàng chọn chia thành nhiều đợt giao hàng, mỗi đợt giao x chiếc ($1 \leq x \leq 2500, x \in \mathbb{N}^*$).



Công ty vận chuyển tính phí cho mỗi đợt như sau:

+ Phí điều xe cố định: 20 đô la/ đợt.

+ Phí an ninh- bảo hiểm cho lô hàng lớn: $0,002x^2$ đô la/ đợt.

Hỏi mỗi đợt công ty nên vận chuyển bao nhiêu máy tính bảng để tổng chi phí vận chuyển trong năm là nhỏ nhất?

Lời giải

Đáp án: 100.

Chi phí vận chuyển cho mỗi đợt là $0,002x^2 + 20$ đô la.

Số lần vận chuyển trong năm là $\frac{2500}{x}$ lần.

Tổng chi phí vận chuyển trong năm là: $f(x) = (0,002x^2 + 20) \cdot \frac{2500}{x} = 5x + \frac{50000}{x}$

Ta có: $f'(x) = 5 - \frac{50000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 100.$

x	1	100	2500
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	50005	1000	12520

Từ bảng biến thiên, ta thấy mỗi đợt công ty nên vận chuyển 100 cái máy tính thì tổng chi phí vận chuyển trong năm là nhỏ nhất

Câu 3: Trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài: m), một người lái mô tô xuất phát từ vị trí $A(0;0;0)$ đến $B(0;600;0)$ trong 6 phút. Từ B , người đó cho xe đổi hướng để tiến thẳng đến $C(1500;600;0)$ với tốc độ không đổi và bằng đúng tốc độ khi đi từ A đến B . Hỏi ở phút thứ 8 kể từ khi xe đổi hướng, tốc độ thay đổi khoảng cách của xe mô tô đối với vị trí xuất phát A là bao nhiêu m/phút?



Lời giải

Đáp án: 80.

Ta có: $A = (0; 0; 0)$ và $B = (0; 600; 0)$.

Độ dài quãng đường AB là $AB = \sqrt{(0-0)^2 + (600-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{0^2 + 600^2 + 0^2} = 600$ (m).

Thời gian đi từ A đến B là 6 phút.

Tốc độ của xe mô tô khi đi từ A đến B là: $v = \frac{AB}{6} = \frac{600}{6} = 100$ (m/phút).

Sau khi đổi hướng tại B , xe đi từ $B(0; 600; 0)$ đến $C(1500; 600; 0)$ với tốc độ không đổi $v = 100$ m/phút.

Giả sử tại thời điểm t (phút) kể từ khi đổi hướng tại B , xe đang ở vị trí $M(x; y; z)$.

Vecto chỉ phương của đoạn BC là:

$$\vec{u}_{BC} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{(1500-0; 600-600; 0-0)}{\sqrt{1500^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{(1500; 0; 0)}{1500} = (1; 0; 0).$$

Vị trí của xe tại thời điểm t là: $M(t) = B + v \cdot t \cdot \vec{u}_{BC}$

$$M(t) = (0; 600; 0) + 100 \cdot t \cdot (1; 0; 0)$$

$$M(t) = (0 + 100t; 600 + 0; 0 + 0)$$

$$M(t) = (100t; 600; 0).$$

Khoảng cách từ xe mô tô đến vị trí xuất phát $A(0; 0; 0)$ tại thời điểm t là $D(t)$:

$$D(t) = |\overrightarrow{AM(t)}| = \sqrt{(100t-0)^2 + (600-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(100t)^2 + 600^2} = 100\sqrt{t^2 + 36}.$$

Tốc độ thay đổi khoảng cách của xe mô tô đối với vị trí xuất phát A chính là đạo hàm của $D(t)$ theo t :

$$D'(t) = \left(100\sqrt{t^2 + 36}\right)' = 100 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2 + 36}} \cdot (2t) = \frac{100t}{\sqrt{t^2 + 36}}.$$

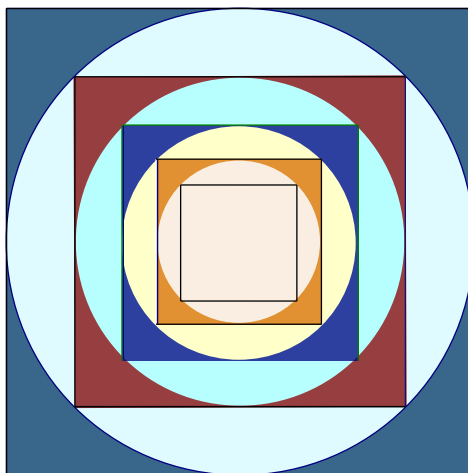
Tại phút thứ 8 kể từ khi xe đổi hướng, tức là $t = 8$ phút.

Thay $t = 8$ vào biểu thức $D'(t)$ ta được:

$$D'(8) = \frac{100 \cdot 8}{\sqrt{8^2 + 36}} = \frac{800}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{800}{\sqrt{100}} = \frac{800}{10} = 80 \text{ (m/phút)}.$$

Vậy, ở phút thứ 8 kể từ khi xe đổi hướng, tốc độ thay đổi khoảng cách của xe mô tô đối với vị trí xuất phát A là 80 m/phút.

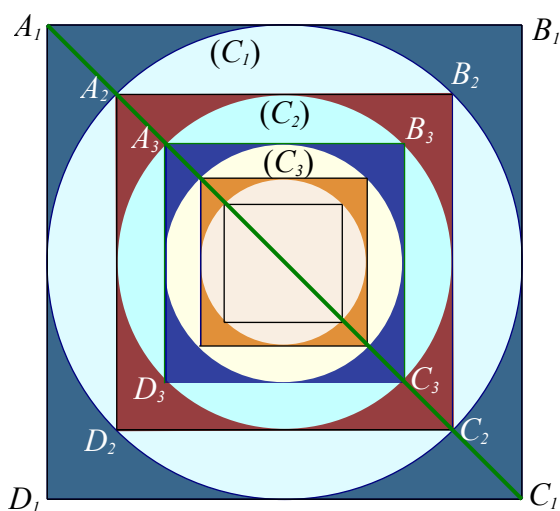
Câu 4: Một loại gạch men có kích thước hình vuông 60×60 cm. Người ta thiết kế hoa văn cho viên gạch bằng cách tạo đường tròn (C_1) nội tiếp hình vuông ban đầu, phần nằm ngoài đường tròn (C_1) mà thuộc viên gạch thì được tô màu đậm. Tiếp theo họ tạo ra một hình vuông nội tiếp đường tròn (C_1) , bên trong hình vuông này lại có một đường tròn nội tiếp (C_2) ; và họ tiếp tục tô màu đậm cho phần nằm ngoài đường tròn (C_2) mà thuộc hình vuông này. Quy luật này cứ tiếp tục vô hạn lần (tham khảo hình vẽ).



Hỏi tổng diện tích thuộc về viên gạch được tô màu đậm là bao nhiêu cm vuông? Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị của cm vuông.

Lời giải

Đáp án: 1545.



Đặt $A_1B_1 = a$, ta có:

* Diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ là $S_{V1} = a^2$.

Bán kính hình tròn (C_1) là $R_1 = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow$ Diện tích hình tròn (C_1) là $S_{T1} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

* Hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có đường chéo $A_2C_2 = 2R_1 = a \Rightarrow$ Cạnh $A_2B_2 = \frac{A_2C_2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là $S_{V2} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Bán kính hình tròn (C_2) là $R_2 = \frac{A_2B_2}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn (C_2) là $S_{T2} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$.

* Hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có đường chéo $A_3C_3 = 2R_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ Cạnh $A_3B_3 = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là $S_{V3} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$

Bán kính hình tròn (C_3) là $R_3 = \frac{1}{2} A_3 B_3 = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn (C_3) là $S_{T_3} = \pi \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{16}$.

* Tiếp tục theo quy luật trên, ta có:

Diện tích các hình vuông $A_1 B_1 C_1 D_1, A_2 B_2 C_2 D_2, A_3 B_3 C_3 D_3, \dots$ lần lượt là $a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots$ lập thành

cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_{V1} = a^2$, công bội $q_1 = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Tổng diện tích các hình vuông là $S_V = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2$

Diện tích các hình tròn nội tiếp tương ứng lần lượt là $\frac{\pi a^2}{4}, \frac{\pi a^2}{8}, \frac{\pi a^2}{16}, \dots$ lập thành cấp số nhân

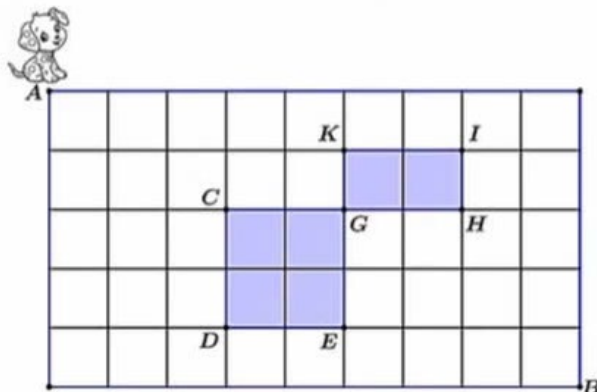
lùi vô hạn với số hạng đầu $S_{T1} = \frac{\pi a^2}{4}$, công bội $q_2 = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Tổng diện tích các hình tròn tương ứng là $S_T = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{16} + \dots = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}$

$\Rightarrow$ Tổng diện tích phần tô màu đậm là: $S = S_V - S_T = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{a^2(4 - \pi)}{2} (cm^2)$

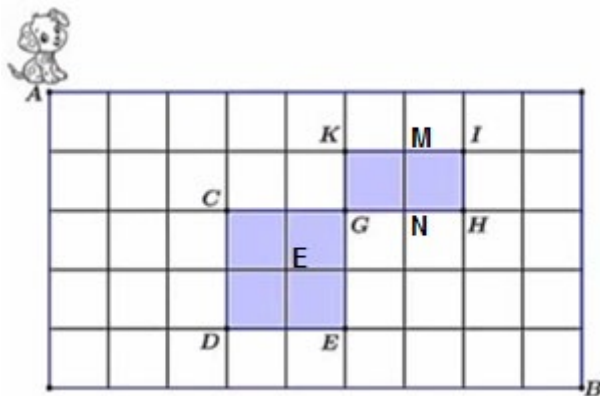
Với $a = 60 (cm)$, ta có tổng diện tích phần tô màu đậm là: $S = \frac{60^2 \cdot (4 - \pi)}{2} \approx 1545 (cm^2)$

Câu 5: Trên một ô lưới như hình, hình chữ chữ nhật AB gồm 9 cột và 5 hàng ô vuông. Một bé cún xuất phát từ điểm A và chạy đến điểm B . Mỗi bước, bé cún chỉ được chạy sang phải hoặc xuống dưới đúng 1 ô (đi theo các cạnh của ô vuông), vì vậy bé cún luôn đi theo đường ngắn nhất. Trong hình vuông có phần tô đậm là những bãi bùn. Bé cún không được chạy vào miền trong của các vùng tô đậm, nhưng vẫn được phép chạy trên đường biên của chúng. Hỏi bé cún có bao nhiêu cách chạy từ A đến B ?



Lời giải

Đáp án: 1127.



Vì đường đi chỉ sang phải có 9 cách, và chỉ đi xuống có 5 cách, nên số cách đi từ A đến B là $C_{14}^5 = 2002$ cách.

Số cách đi sang phải từ A đến E là 4 cách và số cách đi xuống từ A đến E là 3 cách nên số cách đi từ A đến E là $C_7^3 = 35$ cách.

Số cách đi sang phải từ E đến B là 5 cách và số cách đi xuống từ E đến B là 2 cách nên số cách đi từ E đến B là $C_7^5 = 21$ cách.

$\Rightarrow$ số cách đi từ A đến E rồi đến B là $35 \cdot 21 = 735$.

Số cách đi sang phải từ A đến M là 6 cách và số cách đi xuống từ A đến M là 1 cách nên số cách đi từ A đến M là $C_7^1 = 7$ cách.

Đi từ M đi xuống N có 1 cách.

Số cách đi sang phải từ N đến B là 3 cách và số cách đi xuống từ N đến B là 3 cách nên số cách đi từ N đến B là $C_6^3 = 20$ cách.

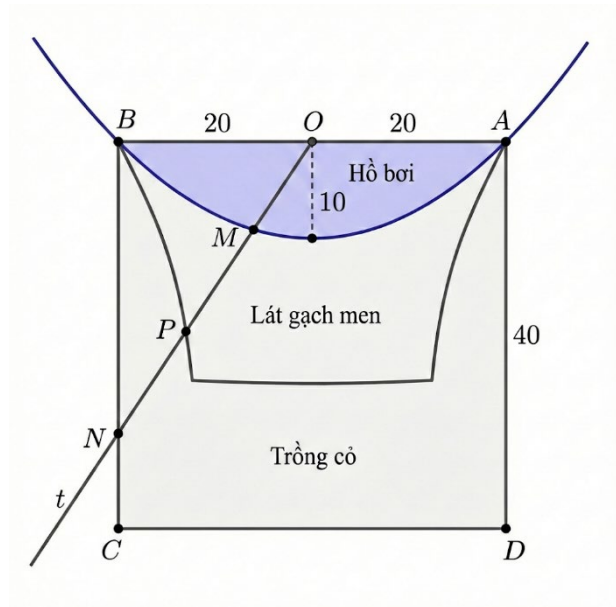
$\Rightarrow$ số cách đi từ A đến M rồi N rồi đến B là $7 \cdot 1 \cdot 20 = 140$.

$\Rightarrow$ Số cách đi từ A đến B của bé cún là $2002 - 735 - 140 = 1127$ cách.

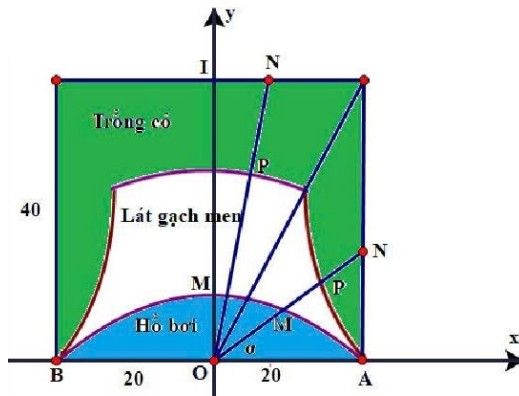
Câu 6: Công tử Bạc Liêu có một mảnh đất hình vuông ở một khu đô thị sầm uất, hình vuông có cạnh 40 m, công tử dự định xây một hồ bơi được giới hạn bởi cạnh AB của hình vuông và một parabol đi qua hai đầu mút cạnh đó, đỉnh của parabol cách cạnh AB một đoạn 10 m. Từ vị trí O là trung điểm AB , kẻ tia Ot bất kì cắt parabol và một cạnh khác của hình vuông theo thứ tự tại các điểm M, N . Gọi P là trung điểm MN , khi tia Ot quay quanh góc O thì tập hợp các điểm P tạo thành đường cong (L) . Công tử dự định sử dụng một loại gạch men đặc biệt để lát nền cho toàn bộ khu vực được giới hạn bởi đường cong (L) và parabol. Phần còn lại trên mảnh đất hình vuông đó thì công tử sẽ trồng cỏ.

Biết rằng chi phí xây hồ bơi là 5 triệu đồng/ m^2 , chi phí lát gạch men là 2 triệu đồng/ m^2 , chi phí trồng cỏ tự nhiên là 100 nghìn đồng/ m^2 . Tính tổng số tiền mà công tử Bạc Liêu phải chi trả cho toàn bộ dự án trên theo đơn vị tỷ đồng (làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp án : 2,4



Lời giải



Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{1}{40}x^2 + 10$.

$$\text{Diện tích hồ bơi là: } S_b = 2 \int_0^{20} \left(-\frac{1}{40}x^2 + 10 \right) dx = \frac{800}{3}.$$

Gọi α là góc tạo bởi tia Ot và trục Ox .

Lúc đó: $M(OM \cos \alpha; OM \sin \alpha)$. Vì $M \in (P) \Rightarrow OM \sin \alpha = \frac{-1}{40}(OM \cos \alpha)^2 + 10$.

$$\Rightarrow OM^2 (\cos \alpha)^2 + 40OM \sin \alpha - 400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} OM = \frac{-20 \sin \alpha - 20}{(\cos \alpha)^2} \\ OM = \frac{-20 \sin \alpha + 20}{(\cos \alpha)^2} \end{cases}$$

$$\text{Ta chọn } OM = \frac{20 - 20 \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} = \frac{20}{1 + \sin \alpha}.$$

$$\text{TH1: } \alpha \in [0, \arctan 2] \Rightarrow ON = \frac{20}{\cos \alpha}. \text{ Suy ra: } OP = \frac{OM + ON}{2} = \frac{10}{1 + \sin \alpha} + \frac{10}{\cos \alpha}.$$

$$\text{TH2: } \alpha \in \left[\arctan 2, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow ON = \frac{40}{\sin \alpha}. \text{ Suy ra: } OP = \frac{OM + ON}{2} = \frac{10}{1 + \sin \alpha} + \frac{20}{\sin \alpha}.$$

$$S_{(L)} = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2} \left(\frac{10}{1 + \sin \alpha} + \frac{10}{\cos \alpha} \right)^2 d\alpha + \frac{1}{2} \int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{10}{1 + \sin \alpha} + \frac{20}{\sin \alpha} \right)^2 d\alpha \right] = 756,3(m^2).$$

Tổng chi phí:

$$5.S_b + 2.(S_L - S_b) + 0,1(S_v - S_L) = 5.\frac{800}{3} + 2.\left(756,3 - \frac{800}{3}\right) + 0,1(1600 - 756,3) = 2396,97 \approx 2,4$$

tỉ.

Lưu ý: Ở trên ta sử dụng công thức của bồ đề sau:

Cho một đường cong (L) có phương trình trong hệ tọa độ cực là $r = r(\theta)$, với $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (L) và hai tia $\theta = \alpha, \theta = \beta$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [r(\theta)]^2 d\theta$$

----- Hết -----